14.4.1 B有限：$\forall x\in A\setminus B$，由于$B$有限，$r=\min\limits_{y\in B}|x-y|>0$

$A\cap B(x,r)$为两个开集之交，从而为包含x的开集，$x\in A\cap B(x,r)\subset A\setminus B$ 故$A\setminus B$为开集

B可数：① $A=\mathbb{R}$，$B=\mathbb{Q}$． $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$不是开集（$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密）

② $A=\mathbb{R}$，$B=\mathbb{Z}$ $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}=\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}}(m,m+1)$是开集

} $A\setminus B$可能开，可能不开

14.4.4 B闭 $\Leftrightarrow$ $\{B$的聚点$\}\subseteq B$

$\Leftrightarrow$ $\{A$的聚点$\}\subseteq A\setminus\{x\}$

$\overset{A\text{闭}.\ \{A\text{的聚点}\}\subseteq A}{\Longleftrightarrow}$ x不是A的聚点

点评：句子翻译

14.4.5 (1) x为A的极限点 $\Leftrightarrow$ $\underset{A}{x_n}\to x$ $\xrightarrow{B\text{在}A\text{中稠密，}\exists|y_n-x_n|<\frac{1}{n}}$ $\underset{B}{y_n}\to x$ $\Rightarrow$ x为B的极限点

(2) 定义 $A_{i,j}=\begin{cases}A\cap[\frac{i}{j},\frac{i+1}{j})\text{中取一元素，} & \text{若}A\cap[\frac{i}{j},\frac{i+1}{j})\neq\phi\\ \phi, & \text{若}A\cap[\frac{i}{j},\frac{i+1}{j})=\phi\end{cases}$，$|A_{i,j}|=0$或$1$

$\bigcup\limits_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ j\in\mathbb{N}}}A_{ij}$至多可数，且在$A$中稠密：$\forall x\in A$，$\forall n\in\mathbb{N}$，

设$x\in[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n})$，则$A_{m,n}=\{y\}$非空，$|x-y|<\frac{1}{n}$． □

取$A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，则$A\cap\mathbb{Q}=\phi$不在$A$中稠密

14.4.6 这里用极限点的定义14.34较方便：x为$\{x_n\}$极限点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0$，存在$\{x_n\}$中无限多项$\in B(x,\varepsilon)$．

设$\{x_n\}$极限点集为A．x为A的聚点，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists A\ni x'$，$x'\in B(x,\varepsilon)$

x'为极限点 $\Rightarrow$ 存在$\{x_n\}$中无限项$\in B(x',\varepsilon)\subseteq B(x,2\varepsilon)$ 即$x'\in A$．故A为闭集 □

14.4.11 (1) $\forall a+b\in A+B$．A开 $\Rightarrow$ $\exists r>0$，$B(a,r)\subseteq A$

$\therefore\forall y\in B(a+b,r)$，$y-b\in A$，$b\in B$．$y=(y-b)+b\in A+B$ $\therefore A+B$为开集

(2) 任意$A+B$中点列$\{\underset{A}{a_n}+\underset{B}{b_n}\}$，$\{a_n\}$有子列$\{a_{k_n}\}\to a\in A$ （A紧），

$\{b_{k_n}\}$有子列$\{b_{l_n}\}\to b\in B$ （B紧） $\{a_{l_n}\}\to a$

$\therefore a_{l_n}+b_{l_n}\to a+b\in A+B$ $\therefore A+B$紧

(3) $A=\{n+\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$，$B=\{-n\mid n\in\mathbb{N}\}$

□

14.4.9 $\mathbb{R}$中 紧 $\Leftrightarrow$ 有界闭（前一句话也可用有限覆盖定义，后一问也可用点列收敛）□

Rmk. 一般拓扑空间中，任意紧集的交不一定是紧集（故后一句话不能只用有限覆盖证）

反例：$\mathbb{N}\cup\{a,b\}$，全部开集定义为 $\begin{cases}\mathbb{N}\text{的任意子集}\\ \mathbb{N}\cup\{a\}\\ \mathbb{N}\cup\{b\}\\ \mathbb{N}\cup\{a,b\}\end{cases}$（见下页拓扑空间的内容）

则 $\mathbb{N}\cup\{a\}$，$\mathbb{N}\cup\{b\}$ 是紧集，但它们的交 $\mathbb{N}$ 不紧（$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}\supseteq\mathbb{N}$ 无有限子覆盖）.

14.4.10 A紧 $\Leftrightarrow$ "开覆盖 $\bigcup_{i\in\Lambda}O_i\supseteq A\Rightarrow\exists$ 有限个 $\bigcup_{k=1}^{n}O_{i_k}\supseteq A$"

$\overset{\text{逆否命题}}{\Longleftrightarrow}$ "$\forall$ 有限开覆盖 $\underline{\bigcup_{k=1}^{n}O_{i_k}\not\supseteq A}\Rightarrow\underline{\bigcup_{i\in\Lambda}O_i\not\supseteq A}$"

$$\Big[\bigcap_{k=1}^{n}O_{i_k}^c\Big]\cap A\neq\phi \qquad \Big[\bigcap_{i\in\Lambda}O_i^c\Big]\cap A\neq\phi$$

$\Leftrightarrow$ "有限交"性质 □

点评：之一个句子翻译

14.4.16. Claim：任意 $\mathbb{R}$ 的子集，孤立点可数

$\forall$ 孤立点 a，$\exists r_a$，$B(a,r_a)$ 中不含 a 的其他点. 取 p_a 为 $B(a,\frac{r_a}{2})$ 中一个有理数

则 $\{\text{孤立点}\}\longrightarrow\mathbb{Q}$ 为单射（若 $p_a=p_b$，会发生什么?）Claim 得证

$a\mapsto p_a$

从而 A 剩下的点 $\subseteq\{\text{聚点}\}$ 不可数 □

Rmk：1. 有同学使用了"$\mathbb{R}$的子集的任意开覆盖均有可数开覆盖"来证明，这也是可以的.

2. 也可以把孤立点对应到有理端点开区间邻域

15.1.18 "$\Rightarrow$" 上半连续，则 $\forall a\in\mathbb{R}$. 取 $x_0\in\{x\in D\mid f(x)<a\}$，即 $f(x_0)<a$

由于 $\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)\le f(x_0)<a$. $\therefore\exists$ 一个邻域 $B(x_0,\delta)$. $f(x)<a$.

（否则可以找到一些趋向 x_0 的点列 $\{x_n\}$，$f(x_n)\ge a$. $\forall n$，$\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)\ge a$）

"$\Leftarrow$" 固定 x_0. 取 $a=f(x_0)+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. 则 $x_0\in\underbrace{\{x\in D\mid f(x)<a\}}_{\text{开}}$

$\Rightarrow\exists\delta>0$，$\forall x\in B(x_0,\delta)$. $f(x)<a$ 从而 $\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)\le a=f(x_0)+\varepsilon$

令 $\varepsilon\to0$. $\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)\le f(x_0)$. 故上半连续 □

Topology

DEFINITION 1.1.1. A *topological space* is a pair $(X, \mathcal{T})$ where X is a set and $\mathcal{T}$ is a family of subsets of X (called the *topology* of X) whose elements are called *open sets* such that

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$ (the empty set and X itself are open),
(2) if $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}$ then $\bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha \in \mathcal{T}$ for any set A (the union of any number of open sets is open),
(3) if $\{O_i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{T}$, then $\bigcap_{i=1}^k O_i \in \mathcal{T}$ (the intersection of a finite number of open sets is open).

Subspace Top.

Definition 1.1. Let $(X, \mathfrak{T})$ be a topological space with topology $\mathfrak{T}$. If Y is a subset of X, the collection

$$\mathfrak{T}_Y = \{Y \cap U | U \in \mathfrak{T}\}$$

is a topology on Y, called the **subspace topology**. With this topology, Y is called a **subspace** of X; its open sets consist of alt intersections of open sets of X with Y.

- The closed sets in S are precisely the intersections of S with closed sets in X.

S中闭集形如 $A\cap S$. $A \subseteq X$
A为X的闭集

Example

- Let $S = [0, 1)$ be a subspace of the real line $\mathbb{R}$. Then $[0, 1/2)$ is open in S but not in $\mathbb{R}$ (as for example the intersection between $(-1/2, 1/2)$ and S results in $[0, 1/2)$). Likewise $[1/2, 1)$ is closed in S but not in $\mathbb{R}$ (as there is no open subset of $\mathbb{R}$ that can intersect with $[0, 1)$ to result in $[1/2, 1)$). S is both open and closed as a subset of itself but not as a subset of $\mathbb{R}$.

作为IR的子空间赋予子拓扑

• 连续函数 $f: D \to \mathbb{R}$ 的定义：$\forall \mathbb{R}$ 的开集 U, $f^{-1}(U)$ 为 D中开集

等价地，也可定义为：$\forall \mathbb{R}$ 中闭集 A, $f^{-1}(A)$ 为 D中闭集

• 度量空间 (metric space) $d: X \times X \to \mathbb{R}$ 满足 $\begin{cases} d(x,y) \geq 0, \text{取}``="\iff x=y \\ d(x,y)=d(y,x) \\ d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z) \end{cases}$

U 为开集 $\overset{def}{\iff}$ $\forall x \in U$, $\exists r>0$ s.t. $B(x,r) \subseteq U$

补充1: Tietze 扩张定理

Lemma: A, B 是度量空间 X 中的无交闭集. 则存在一个连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 满足

$$f|_A = 1. \quad f|_B = -1. \quad -1 < f < 1 \text{ on } X - (A \cup B)$$

proof: $d(x, C)$ 定义为 $\inf_{y \in C} d(x, y)$, 对于闭集 A. $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$

则 $d(x, A) + d(x, B)$ 在 X 上恒正.

定义 $f(x) = \frac{d(x, B) - d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$ 即可 □

Theorem (Tietze extention) 度量空间 X. A 为 X 的闭集. $f: A \to \mathbb{R}$ 连续.

则 f 可延拓为 $X \to \mathbb{R}$ 的连续函数

proof: 1° 先设 f 有界: $|f| \le M$ $\quad A_1 = \{x \in A \mid f(x) \ge \frac{M}{3}\}$. $B_1 = \{x \in A \mid f(x) \le -\frac{M}{3}\}$ 均为闭集

由 Lemma. 存在 $g_1: X \to \mathbb{R}$ 连续. $g_1|_{A_1} = \frac{M}{3}$, $g_1|_{B_1} = -\frac{M}{3}$, $-\frac{M}{3} < g_1 < \frac{M}{3}$ on $X - (A_1 \cup B_1) \supseteq X - A$

此时 $|f - g_1| \le \frac{2}{3} M$ on A. $A_2 = \{x \in A \mid f(x) - g_1(x) \ge \frac{2}{9} M\}$. $B_2 = \{x \in A \mid f(x) - g_1(x) \le -\frac{2}{9} M\}$ 均为闭

由 Lemma. 存在 $g_2: X \to \mathbb{R}$ 连续. $g_2|_{A_1} = \frac{2}{9} M$. $g_2|_{B_1} = -\frac{2}{9} M$, $-\frac{2}{9} M < g_2 < \frac{2}{9} M$ on $X - (A_2 \cup B_2) \supseteq X - A$

此时 $|f - g_1 - g_2| \le \frac{4}{9} M$ on A. $\cdots$

找到一列 $\{g_n\}$. $|f - g_1 - \cdots - g_n| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n M \to 0$, $|g_n| \le \frac{2^{n-1}}{3^n} M$ 且 $|g_n| < \frac{2^{n-1}}{3^n} M$ on $X - A$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ 一致收敛到一个连续函数 g 满足:

① $g = f$ on A ② $|g| \le \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} M = M$ ③ $|g| < M$ on $X - A$

我们找到了所需的延拓

2° 对于 f 无界的情况. $\arctan \circ f: A \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 连续. M 取为 $\frac{\pi}{2}$

由1°, $\arctan \circ f$ 可延拓为 $g: X \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 连续

则 $\tan \circ g: X \to \mathbb{R}$ 连续 且 $\tan \circ g|_A = \tan \circ \arctan \circ f|_A = f|_A$. 即得所需延拓 □

感兴趣的同学可自己阅读群文件 火箭讲义 Lec 14: Urysohn 引理的内容

补充2：Problem（背景：Ratner定理，拓扑动力系统）

(1) 若α（无理数）为一个整系数一元二次方程的根，则存在$\varepsilon>0$ s.t. $|\alpha-\frac{p}{q}|>\varepsilon/q^2$，$\forall \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$

(2) 考虑二次型 $Q(x,y)=x^2-(3+2\sqrt{2})y^2$．证明：$Q(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$在$\mathbb{R}$中不稠密

hint：(1) 设$k(x-\alpha)(x-\beta)$为所说的整系数一元二次方程 kx^2+bx+c

代入$x=\frac{p}{q}$，分 $\begin{cases}|\frac{p}{q}-\alpha|<\frac{|\alpha-\beta|}{2}\\ |\frac{p}{q}-\alpha|\geq\frac{|\alpha-\beta|}{2}\end{cases}$ 讨论，确定ε

(2) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ 满足(1)的条件，try to make use of it.

Theorem (Magulis) Q是一个实的二次型，如果Q满足：

a) Q不定（可取正值可取负值）

b) 非退化（定义：不存在非零向量$x\in\mathbb{R}^n$使得$Q(v+x)=Q(v-x)$，$\forall v\in\mathbb{R}^n$），

c) 不能写成整系数二次型的倍数

则$Q(\mathbb{Z}^n)$在$\mathbb{R}$中稠密

例：$Q(x,y,z)=x^2-\sqrt{2}xy+\sqrt{3}z^2$